

MEKANİKA

**ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ
В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ТРУБКЕ
С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА СУЖЕНИЯ**

Г.А.АЛИЕВ, Р.Ю.АМЕНЗАДЕ

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

В настоящее время большое внимание привлекают задачи математической физики, возникающие при описании волновых движений жидкостей различной природы в деформируемых трубках. Этот интерес обусловлен не только большой прикладной значимостью указанных задач (процесс переноса в различных химико-технологических устройствах, гемодинамика, трубопроводный транспорт), но и их новым теоретическим и математическим содержанием, часто не имеющим аналогов в классической математической физике.

В данной работе, на основе одномерных уравнений, рассмотрена механическая система, включающая в себя деформируемую трубку, в полости которой протекает жидкость.

Математическая модель исследуемой системы представляет собой уравнение движения идеальной сжимаемой баротропной двухфазной пузырьковой жидкости совместно с уравнением неразрывности, учитывающим кинематическое контактное условие непроницаемости и уравнения статики неоднородной по длине вязко-упругой трубки переменного кругового сечения. Принимается, что трубка полубесконечная и она жестко прикреплена к окружающей среде, вследствие чего смещение в осевом направлении отсутствует.

1. Допустим, что дана полубесконечная вязко-упругая трубка переменного кругового сечения $R=R(x)$ и толщиной h , где $R(x)$ - монотонно убывающая функция $\forall x \in [0, \infty)$. Система уравнений гидроупругости состоит из уравнения движения смеси [1]

$$\rho_{ж0} \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.1)$$

уравнения неразрывности [2]

$$\frac{S}{a^2 \rho_{ж0}} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Su) + L \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

и уравнения состояния [3]

$$p = \frac{h}{R^2(x)} E^v w, \quad (1.3)$$

в котором вязко-упругие свойства материала описываются теорией наследственной упругости Ю.Н.Работнова [4]

$$E^v w = E(x) \left\{ w(x, t) - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau, x) w(x, \tau) d\tau \right\}. \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.1)-(1.4) $u(x, t)$ - продольная составляющая скорости, $p(x, t)$ - гидродинамическое давление, $w(x, t)$ - радиальное перемещение, $S(x) = \pi R^2(x)$ - площадь поперечного сечения трубки, $L(x)$ - длина ее окружности, $E(x)$ - модуль упругости, а $\Gamma(t - \tau, x)$ - разностное ядро релаксации. Следуя [1]

$$a^2 = \frac{1}{\alpha_{20}(1 - \alpha_{20})} \left(\frac{\rho_{10}^0}{\rho_{10}^0 - \rho_{20}^0} \right)^2 \frac{p_0}{\rho_{10}^0} - \quad (1.5)$$

скорость звука;

$$\rho_{ж0} = (1 - \alpha_{20})\rho_{10}^0 + \alpha_{20}\rho_{20}^0 - \quad (1.6)$$

плотность газожидкостной смеси, а α_{20} - объемное содержание пузырьков, ρ_{10}^0 и ρ_{20}^0 - истинные плотности жидкости и газа соответственно, p_0 - статическое давление. При этом нижний индекс соответствует значениям параметров в равновесном состоянии. Не умоляя общности, задаваемые функции $R(x)$, $E(x)$ и $\Gamma(t - \tau, x)$ запишем как

$$R(x) = R_{\infty} g_1(x), E(x) = E_{\infty} g_2(x), \Gamma(t - \tau, x) = \Gamma_{\infty} g_3(x),$$

где, не ущемляя физику явления, функции $g_j(x)$ ($j = \overline{1,3}$) обладают условиями гладкости, необходимыми для законности проведения последующих операций.

Более того, полагаем, что на бесконечности материал трубки однородный, а трубка имеет постоянное поперечное сечение. Отсюда следует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g_2(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g_3(x) = 1. \quad (1.7)$$

В тоже время считаем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_1'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g_1''(x) = 0. \quad (1.8)$$

Теперь, введя расход жидкости по формуле $Q = Su$, систему уравнений (1.1)-(1.3), используя выражение (1.4), после ряда выкладок, сведем к следующему интегро-дифференциальному уравнению относительно функции $w(x, t)$, которое описывает динамическое поведение системы

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{g_2(x)}{g_1^2(x)} \left[w(x,t) - g_3(x) \int_{-\infty}^t \Gamma_{\infty}(t-\tau) w(x,\tau) d\tau \right] \right\} + \frac{1}{c_0^2 g_1(x)} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \\
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{g_2(x)}{g_1^2(x)} \left[w(x,t) - g_3(x) \int_{-\infty}^t \Gamma_{\infty}(t-\tau) w(x,\tau) d\tau \right] \right\} - \\
& - 2 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{g_2(x)}{g_1^2(x)} \left[w(x,t) - g_3(x) \int_{-\infty}^t \Gamma_{\infty}(t-\tau) w(x,\tau) d\tau \right] \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь для краткости записи введено обозначение

$$c_0^2 = \frac{hE_{\infty}}{2\rho_{\infty} R_{\infty}}. \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим случай распространения гармонических волн. Для этого, используя метод разделения переменных и заметив, что принципиальное значение имеет анализ чисто синусоидального колебания с одной заданной частотой ω , решение уравнения (1.9) ищем в виде

$$w(x,t) = w_0(x) \exp(i\omega t), \tag{2.1}$$

где i - мнимая единица, а $w_0(x)$ - искомая, вообще говоря, комплексная функция координаты положения.

В начале преобразуем интеграл, входящий в уравнение (1.9). С этой целью, учитывая (2.1), найдем:

$$\int_{-\infty}^t \Gamma_{\infty}(t-\tau) w(x,\tau) d\tau = w_0(x) \int_{-\infty}^t \Gamma_{\infty}(t-\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau.$$

Кроме того, проведя замену $t-\tau = \theta$, получим

$$w_0(x) \int_{-\infty}^t \Gamma_{\infty}(t-\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau = \alpha w_0(x) \exp(i\omega t).$$

Здесь имеем:

$$\alpha = \int_0^{\infty} \Gamma_{\infty}(\theta) \exp(-i\omega\theta) d\theta = \alpha_0 + i\alpha_1. \tag{2.2}$$

Далее, подставив (2.1) в (1.9), учитывая (2.2) и введя новую переменную

$$\frac{g_2(x)}{g_1^2(x)} w_0(x) \{1 - \alpha g_3(x)\} = v(x), \tag{2.3}$$

получим уравнение:

$$v''(x) + 2 \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} v'(x) + \omega^2 \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{g_1(x)}{c_0^2 g_2(x) [1 - \alpha g_3(x)]} \right\} v(x) = 0.$$

Легко установить, что замена Лиувилля

$$y(x) = v(x) \exp \left\{ \int \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} dx \right\} = v(x) g_1(x) \quad (2.4)$$

приводит предыдущее уравнение (2.3) к виду

$$y''(x) + I(x)y(x) = 0 \quad (2.5)$$

при

$$I(x) = \omega^2 \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{g_1(x)}{c_0^2 g_2(x) [1 - \alpha g_3(x)]} \right\} - \left\{ \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} \right\}^2 - \left\{ \frac{g_1'(x)}{g_1(x)} \right\}' \quad (2.6)$$

В силу (1.7) и (1.8), переход в (2.6) к пределу дает равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = \omega^2 \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c_0^2 (1 - \alpha)} \right\} = \delta^2 \quad (2.7)$$

Введя обозначение $q(x) = \frac{I(x)}{\delta^2}$ уравнение (2.5) перепишем следующим образом:

$$y'' + \delta y = \delta^2 q(x) y \quad (2.8)$$

В дальнейшем будем использовать корень, у которого $\text{Im} \delta < 0$, а на потенциал $q(x)$ наложим условие интегрируемости

$$\int_0^{\infty} |q(x)| dx < +\infty \quad (2.9)$$

Для построения решения, уравнение (2.8) необходимо дополнить следующими граничными условиями

$$y(0) = y_0, y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

В результате, решение поставленной задачи сведено к сингулярной краевой задаче Штурма-Лиувилля (2.8), (2.10) относительно функции $y(x)$, посредством которой в силу (2.3) и (2.4) находим:

$$w_0(x) = y(x) \frac{g_1(x)}{g_2(x) \{1 - \alpha g_3(x)\}} \quad (2.11)$$

3. Рассматривая правую часть (2.8) уравнения как внешний источник и применяя затем метод вариации произвольных постоянных, решение задачи сведем к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x, -\delta) = C e^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y(\xi, -\delta) d\xi \quad (3.1)$$

Здесь $C = \frac{y_0}{f(0, -\delta)}$, $y = y_0 \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}$, а новая функция $f(x, -\delta)$

определяется из решения интегрального уравнения [2]

$$f(x, -\delta) = e^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\xi - x) q(\xi) f(\xi, -\delta) d\xi. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) является уравнением Вольтерра и решается методом последовательных приближений

$$f(x, -\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f_n(x, -\delta), \quad (3.3)$$

где

$$f_0(x, -\delta) = e^{-i\delta x} \\ \dots \dots \dots \quad (3.4)$$

$$f_n(x, -\delta) = \int_x^{\infty} \sin \delta(\xi - x) q(\xi) f_{n-1}(\xi, -\delta) d\xi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Отсюда в силу неравенства (2.9) и выбора знака $\text{Im}\delta$, по признаку Вейерштрасса, из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (3.2) определяется формулой (3.3).

Непосредственной проверкой можно показать, что это решение является, в свою очередь, решением уравнения (2.8). Для дальнейших целей целесообразно заметить, что ряды получаемые почленным дифференцированием (3.3), также сходятся равномерно.

4. Один из путей решения задачи может быть осуществлен, когда на торце трубки задано пульсирующее давление

$$p(0, t) = p_{00} \exp(i\omega t), \quad (4.1)$$

где p_{00} - задаваемая эмпирическая величина. Вначале заметим, что справедливо следующее равенство

$$w(x) = y_0 \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} \frac{g_1(x)}{g_2(x) \{1 - \alpha g_3(x)\}}. \quad (4.2)$$

Положив его в (1.3) и учитывая при этом (1.4), получим:

$$p(x, t) = y_0 \frac{hE_{\infty}}{R_{\infty}^2 g_1(x)} \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} \exp(i\omega t). \quad (4.3)$$

Сопоставляя (4.1) с (4.2) при $x = 0$, определяем

$$y_0 = p_{00} \frac{R_{\infty}^2 g_1(0)}{hE_{\infty}}.$$

Имея в виду полученный результат в (4.2) и (4.3), находим:

$$p(x, t) = p_{00} \frac{g_1(0)}{g_1(x)} \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} \exp(i\omega t), \quad (4.4)$$

$$w(x, t) = p_{00} \frac{R_{\infty}^2 g_1(0)}{hE_{\infty}} \frac{g_1(x)}{g_2(x)\{1 - \alpha g_3(x)\}} \exp(i\omega t). \quad (4.5)$$

Для отыскания расхода смеси $Q(x, t)$ должны быть совместно решены уравнение движения смеси (1.1) в форме

$$\rho_{ж0} \frac{\partial Q}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x}$$

при

$$Q(x, t) = q(x) \exp(i\omega t)$$

и соотношение (4.4). Здесь, проведя соответствующие выкладки, приходим к равенству

$$Q(x, t) = \frac{\pi i}{\omega \rho_{ж0}} R_{\infty}^2 g_1(0) g_1^2(x) \varphi(x, -\delta) \exp(i\omega t), \quad (4.6)$$

в котором

$$\varphi(x, -\delta) = \frac{g_1(x) \frac{f'(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} - g_1'(x) \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}}{g_1^2(x)}.$$

Подчеркнем, что в линейном приближении физическую величину определяют реальные части найденного решения.

5. Для дальнейшей численной реализации рассмотрим смесь, состоящую из воды и содержащей небольшие добавки воздуха. Такая схематизация весьма важна, так как вода определяющим образом влияет на протекание многих физико-химических, биологических и технологических процессов. С другой стороны в ней всегда есть примеси, в частности, пузырьки воздуха [5]. Примем следующие допущения, характеризующие смесь. Будем считать, что

$$\alpha_{00} = 0,02, \quad \rho_{10}^0 = 1 \text{ г/см}^3, \quad \rho_{20}^0 = 10^{-3} \text{ г/см}^3, \quad p_0 = 10^4 \text{ дн/см}^2.$$

Отсюда с достаточной точностью легко найти:

$$a^2 \approx \frac{1}{(1 - \alpha_{20}) \alpha_{20}} \frac{p_0}{\rho_{10}^0}, \quad \rho_{ж0} \approx (1 - \alpha_{20}) \rho_{10}^0, \quad c_0^2 = c_{00}^2 \frac{1}{1 - \alpha_{20}},$$

где

$$c_{00}^2 = \frac{hE_{\infty}}{2R_{\infty} \rho_{10}^0}.$$

Оставшиеся параметры зададим следующим образом: $R=1,2$ см, $h=0,2$ см, $E_{\infty}=4 \cdot 10^6$ дн/см², $p_{00}=1,4 \cdot 10^3$ дн/см², $\omega=10$ сек⁻¹, $Q_0=120$ см³/сек.

Примем сначала в качестве численного примера решение подобной задачи для неоднородной упругой трубки ($\alpha=0$) постоянного поперечного сечения $\{g_1(x)=1\}$. Используя прежние обозначения, для безразмерной скорости c/c_{00} запишем

$$\frac{c}{c_{00}} = \frac{1}{c_{00}} \frac{\omega}{\sqrt{I(x)}}.$$

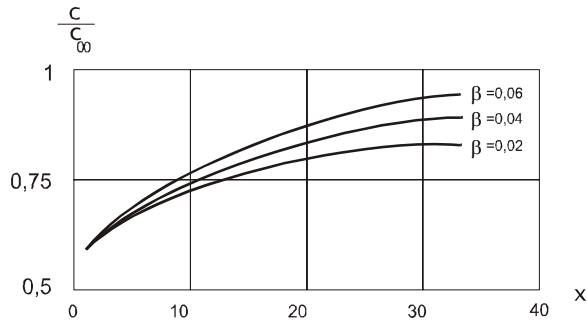


Рис. 1.

На рисунке 1 представлены кривые, полученные по приведенной выше зависимости при

$$g_2(x) = \frac{2 - e^{-\beta x}}{2}. \quad (5.1)$$

Здесь величина $\beta > 0$ характеризует увеличение жесткости материала трубки по мере её удаления от торца. Как и следовало ожидать скорость волны увеличивается с возрастанием x и β . Представим теперь числовые данные, найденные по формулам (4.4)-(4.6), выполненные применительно к случаю однородной упругой трубки $\{\alpha = 0, g_2(x) = 1\}$ переменного кругового сечения, принимая [6] для функции $g_1(x)$

$$g_1(x) = 1 + e^{-\alpha x} \quad (\alpha > 0), \quad (5.2)$$

которая описывает сужение трубки по длине. Очевидно, что функции (5.1) и (5.2) удовлетворяют условиям (1.7) и (1.8).

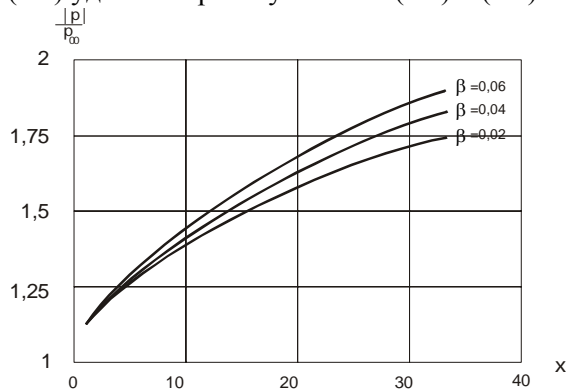


Рис. 2.

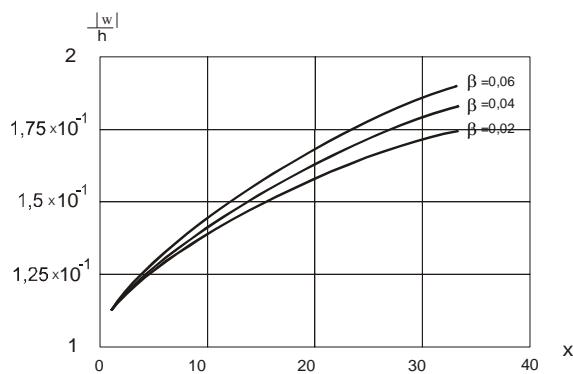


Рис. 3.

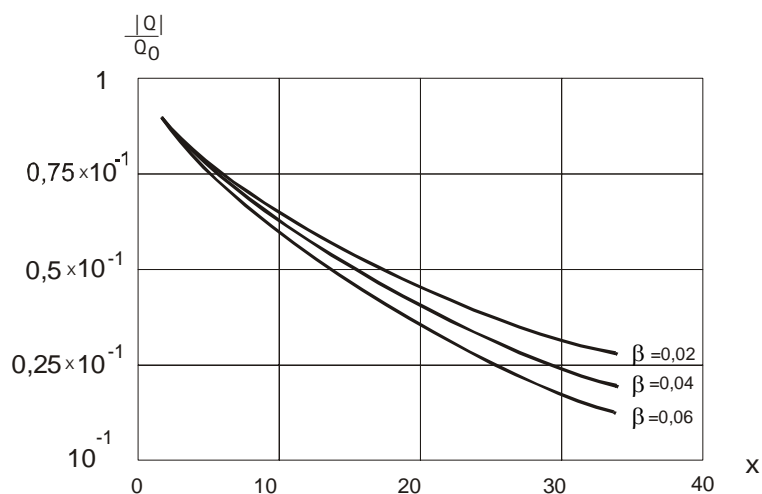


Рис. 4.

Полученные зависимости, представленные на рисунках 2, 3 и 4 наглядно иллюстрируют, что амплитуда давления и радиального смещения увеличиваются, а амплитуда расхода уменьшается. Кроме того отметим тот факт, что построенные графики соответствуют второму приближению, т.к. оно дает приемлемый результат (второе и третье приближения практически совпадают).

В заключение заметим, что при тех же допущениях, что и выше, численно было получено решение для экспоненциального ядра $\Gamma(t) = me^{-\beta t}$ для $m = 0,2$ и $\alpha = 0,2$. Однако этот вариант не приводится, в силу того, что он совпадает с приведенным, не считая возникновения весьма незначительного затухания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Волны в жидкостях с пузырьками. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М., ВИНТИ, вып. 17, 1982. 247 с.
2. Алиев Г.А., Амензаде Р.Ю. Волны в двухфазной жидкости заключенной в упругую трубку переменного сечения. Механика машиностроения, №2, Баку, 2004. с. 3-7.
3. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б., Киясбейли Э.Т. Пульсирующее течение максвелловской жидкости в вязкоупругой трубке. ДАН Азербайджана. том LIX, №3-4, -с. 37-41.
4. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., Наука, 1978. -383 с.
5. Анточенко В.Я. Физика воды. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1986, 128 с.
6. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М., «Мир», 1983. 400 с.

DARALMA EFFEKTİ NƏZƏRƏ ALINMAQLA QEYRİ-BİRCİNS ÖZLÜ-ELASTİK BORUDA İKİFAZALI MAYENİN DÖYÜNƏN AXINI

Q.Ə.ƏLİYEV, R.Y.ƏMƏNZADƏ

ANNOTASIYA

Bu işdə birölçülü tənliklər əsasında içərisində maye axan ensiz boruların daxil olduğu mexaniki sistemə baxılmışdır.

Tədqiq olunan sistemin riyazi modeli, ideal, sıxılan, barotrop, ikifazlı, qabarcıqlı mayenin hərəkət tənliyi və kəsilməzlik şərtindən ibarətdir. Bu zaman həmçinin nüfuzedilməməzliyin kinematik kontakt şərti və uzunluğuna görə qeyri bircins, dəyişən, dairəvi en kəsiyinə malik özlü elastik borunun tarazlıq tənlikləri də nəzərə alınmalıdır.

PULSING FLOW OF TWO-PHASE FLUID IN NON-HOMOGENEOUS VISCO-ELASTIC TUBE SUBJECT TO CONSTRICTION EFFECT

G.A.ALIYEV, R.Y.AMENZADE

ABSTRACT

In this paper based on the one-dimensional equations we consider a mechanical system inclusive a deformed tube in whose cavity the fluid flows.

The mathematical model of the investigated system represents the motion equation of ideal compressible barotropic two-phase bubble considering the kinematics contact impermeability condition and the statics equation of non-homogeneous by length visco-elastic tube of variable circular cross-section.